



Olimpiada națională de matematică

etapa locală

05.03.2016

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE

1. Fie $a, b \in (0, 1)$ și $x, y \in \mathbb{N}^*$

Arătați că $\log_a \frac{2a^{2x} \cdot b^{2y}}{a^{2x} + b^{2y}} + \log_b \frac{2a^{2y} \cdot b^{2x}}{a^{2y} + b^{2x}} \geq 2(x + y)$.

Bud Adrian

Soluție:

$$\log_a \frac{2a^{2x} \cdot b^{2y}}{a^{2x} + b^{2y}} \geq \log_a \sqrt{a^{2x} \cdot b^{2y}} = \log_a a^x \cdot b^y \geq x + y \log_a b \quad 2p$$

$$\log_b \frac{2a^{2y} \cdot b^{2x}}{a^{2y} + b^{2x}} \geq \log_b \sqrt{a^{2y} \cdot b^{2x}} = \log_b a^y \cdot b^x \geq x + y \log_b a \quad 2p$$

Prin adunarea relațiilor rezultă

$$\log_a \frac{2a^{2x} \cdot b^{2y}}{a^{2x} + b^{2y}} + \log_b \frac{2a^{2y} \cdot b^{2x}}{a^{2y} + b^{2x}} \geq x + y \log_a b + x + y \log_b a \geq \quad 2p$$

$$2x + y \underbrace{(\log_a b + \log_b a)}_{\geq 2} \geq 2(x + y) \quad 1p$$

2. Să se determine $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ știind că
$$\sqrt[n]{\frac{1}{54^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{27^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{9^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Traian Tămăian

Soluție:

Ecuția se scrie echivalent

$$\frac{1}{54^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{27^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{9^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \Leftrightarrow 54^{-\frac{n}{2}} + 27^{-\frac{n}{2}} + 9^{-\frac{n}{2}} + 3^{-\frac{n}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}} \quad (1) \quad 1p$$

Notând $-\frac{n}{2} = x, x \in \mathbb{Q}$, ecuația (1) devine 1p



$$\begin{aligned}54^x + 27^x + 9^x + 3^x &= 2^x \Leftrightarrow 2^x 3^{3x} + 3^{3x} + 3^{2x} + 3^x = 2^x \Leftrightarrow \\2^x (3^{3x} - 1) + 3^x (3^{2x} + 3^x + 1) &= 0 \Leftrightarrow (3^{2x} + 3^x + 1)[2^x (3^x - 1) + 3^x] = 0 \Leftrightarrow \\2^x (3^x - 1) + 3^x &\Leftrightarrow 6^x + 3^x = 2^x \Leftrightarrow 3^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \quad (2)\end{aligned}$$

2p

Se observă că $x = -1$ este soluție a ecuației (2). Vom demonstra că este unică.

Dacă $x > -1$ atunci $f(x) > f(-1) \Leftrightarrow 3^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x > 1$ și relația (2) nu are loc.

Dacă $x < -1$ atunci $f(x) < f(-1) \Leftrightarrow 3^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1$ și relația (2) nu are loc.

Rezultă că $x = -1$ este unica soluție a ecuației (2).

2p

Rezultă că $-\frac{n}{2} = -1$, de unde se obține că $n = 2$.

1p

3. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Să se demonstreze că:

a) $2(a^5 + b^5) \geq (a^3 + b^3)(a^2 + b^2)$

b) $\sqrt{\frac{a^3 + b^3}{a^5 + b^5}} + \sqrt{\frac{b^3 + c^3}{b^5 + c^5}} + \sqrt{\frac{c^3 + a^3}{c^5 + a^5}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$

Traian Tămâian

Soluție:

a) Relația cerută se scrie

$$(a^2 - b^2)(a^3 - b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 (a + b)(a^2 + ab + b^2) \geq 0, \text{ relație adevărată.} \quad 2p$$

b) Relația de la punctul a) se scrie echivalent $\frac{a^3 + b^3}{a^5 + b^5} \leq \frac{2}{a^2 + b^2} \quad (1) \quad 1p$

Deoarece $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$ rezultă $\frac{2}{a^2 + b^2} \leq \frac{4}{(a + b)^2} \quad (2) \quad 1p$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\frac{a^3 + b^3}{a^5 + b^5} \leq \frac{4}{(a + b)^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^3 + b^3}{a^5 + b^5}} \leq \frac{2}{a + b} \quad (3) \quad 1p$

Cum $(a + b)^2 \geq 4ab$, rezultă că $\frac{2}{a + b} \leq \frac{a + b}{2ab} \Leftrightarrow \frac{2}{a + b} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (4) \quad 1p$



Din (3) și (4) rezultă că $\sqrt{\frac{a^3+b^3}{a^5+b^5}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ (5)

Scriind analogice pentru (5) și însumând relațiile obținem

$$\sum \sqrt{\frac{a^3+b^3}{a^5+b^5}} \leq \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow \sum \sqrt{\frac{a^3+b^3}{a^5+b^5}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad 1p$$

4. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $\left| z + \frac{1}{z} \right| = 2\sqrt{2}$. Demonstrați, că $\left| |z| - \sqrt{3} \right| \leq \sqrt{2}$.

Cziprok András

Soluție:

pe de o parte $|z| = \left| z + \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \right| \leq \left| z + \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z} \right| = 2\sqrt{2} + \left| \frac{1}{z} \right| \quad 1p$

de unde $|z|^2 - 2\sqrt{2}|z| - 1 \leq 0 \quad 1p$

de unde $|z| \leq \sqrt{2} + \sqrt{3} \dots\dots\dots (1) \quad 1p$

pe de altă parte $\left| \frac{1}{z} \right| = \left| z + \frac{1}{z} - z \right| \leq \left| z + \frac{1}{z} \right| + |z| = 2\sqrt{2} + |z| \quad 1p$

de unde $|z|^2 + 2\sqrt{2}|z| - 1 \geq 0 \quad 1p$

de unde $|z| \geq -\sqrt{2} + \sqrt{3} \dots\dots\dots (2) \quad 1p$

din (1) și (2) finalizare 1p